Propiedad: En el modelo lineal con 2 variables, el coeficiente de determinación es igual al coeficiente de correlación al cuadrado, es decir que $R^2 = r^2$.

Demostración:

Recordemos primero que el coeficiente de correlación se define como:

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$$

Luego, r^2 será:

$$r^2 = \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$$

Partimos de la definición de R^2 para llegar a r^2:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT}$$

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^{\,2}}{\sum y_i^{\,2}}$$

Reemplazando $\hat{y}_i$ por su definición y teniendo en cuenta que por propiedad algebraica 5, $\hat{Y}_i$ e Y_i tienen la misma media muestral ($\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$):

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum y_i^{\,2}}$$

Reemplazamos $\hat{Y}_i$ por su definición:

$$R^2 = \frac{\sum(\overbrace{\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i}^{\hat{Y}_i} - \bar{Y})^2}{\sum y_i^{\,2}}$$

Reemplazamos $\hat{\alpha}$ por su estimador mínimo cuadrático ($\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$):

$$R^2 = \frac{\sum(\overbrace{\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}}^{\hat{\alpha}} + \hat{\beta}X_i - \bar{Y})^2}{\sum {y_i}^2}$$

Cancelando términos y reordenando:

$$R^2 = \frac{\sum[\hat{\beta}(\overbrace{X_i - \bar{X}}^{x_i})]^2}{\sum {y_i}^2}$$

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{\beta}x_i)^2}{\sum {y_i}^2}$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \sum {x_i}^2}{\sum {y_i}^2}$$

Reemplazamos $\hat{\beta}$ por su estimador mínimo cuadrático ($\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum {x_i}^2}$):

$$R^2 = \underbrace{\left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum {x_i}^2}\right)}_{\hat{\beta}}^2 \frac{\sum {x_i}^2}{\sum {y_i}^2}$$

$$R^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{(\sum {x_i}^2)^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{\sum {x_i}^2}}{\sum {y_i}^2}$$

Finalmente:

$$\boxed{R^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum {x_i}^2 \sum {y_i}^2} = r^2}$$