Los estimadores mínimo cuadráticos bajo los supuestos clásicos

Propiedades estadísticas e inferencia

Mariana Marchionni
marchionni.mariana@gmail.com

Econometría I - FCE - UNLP
www.econometria1unlp.com

Temario de la clase

Estimación por MCO del modelo lineal simple

Tenemos el modelo lineal con 2 variables

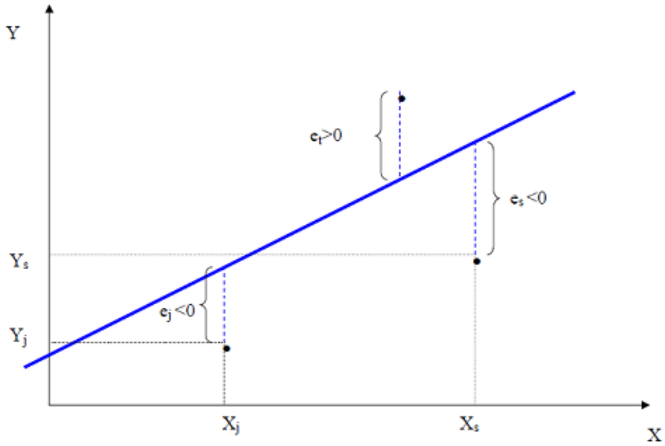
$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i \qquad i = 1, ...n$$

Y el objetivo es estimar α y β a partir de (Y_i, X_i) $i = 1, ...n$.

Recordemos notación y definiciones:

- $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son los estimadores de α y β
- $\hat{Y}_i \equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ es la versión estimada de Y_i
- $e_i \equiv Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i)$ es el error de estimación (residuo)

Cada posible valor que asignemos a $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ define una recta en el plano (Y, X)



Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Criterio de MCO: elegir $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ de manera de minimizar la **S**uma de los **R**esiduos al **C**uadrado (SRC).
Formalmente:

$$Min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}\ SRC(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i)]^2$$

$$CPO: \begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial SRC}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \\ \\ (2) \quad \dfrac{\partial SRC}{\partial \hat{\beta}} = 0 \end{cases}$$

Solución:

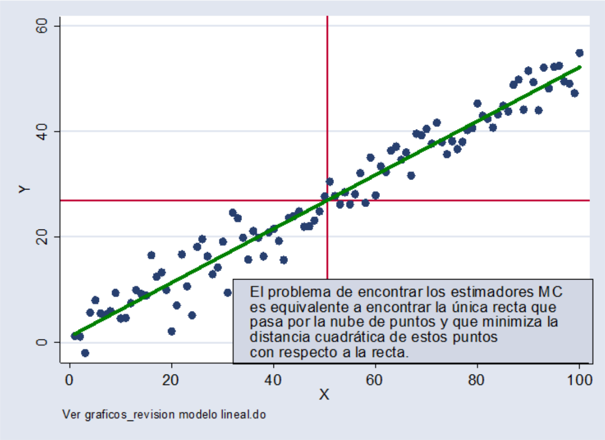
$$(3)\ \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \text{ y } (4)\ \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{Y}\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} \text{ o } (4')\ \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Propiedades algebraicas

1. $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} e_i X_i = 0 \quad (\Rightarrow Cov(X,e) = 0)$
3. $\hat{Y}(\bar{X}) = \bar{Y} \quad$ ($\Rightarrow$la recta de regresión pasa por las medias muestrales)
4. $\hat{\beta} = r_{Y,X} s_Y / s_X$ (relación entre el coeficiente de regresión y el de correlación)
5. $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$ (la media de las estimaciones de Y coincide con $\bar{Y}$)
6. $\hat{\beta}$ es una función lineal de las Y_i, que puede escribirse como$\hat{\beta} = \sum \omega_i Y_i$, donde ω_i son números reales no aleatorios que dependen únicamente de las X_i.
7. $r_{\hat{Y},e} = 0$ (la correlación entre las estimaciones de Y y los residuos es nula)

La regresión estimada por MCO

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$



Bondad del ajuste

- Vimos que cuando se estima por MCO es válida la siguiente descomposición:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}_{STC} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}_{SEC} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}_{SRC}$$

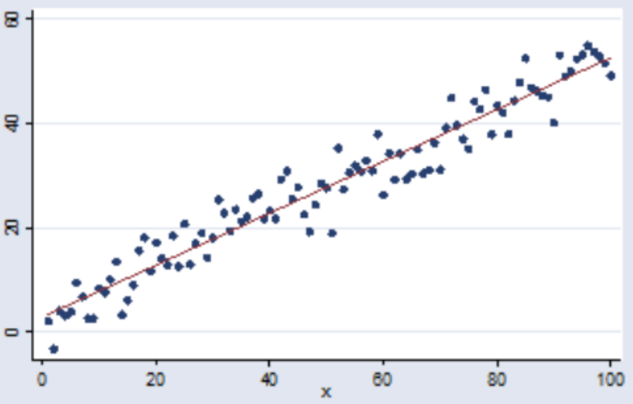
$$STC = SEC + SRC$$

STC: Suma Total de Cuadrados, *SEC*: Suma Explicada de Cuadrados, *SRC*: Suma de los Residuos al Cuadrado.

- Definimos la medida de bondad del ajuste R^2 como:

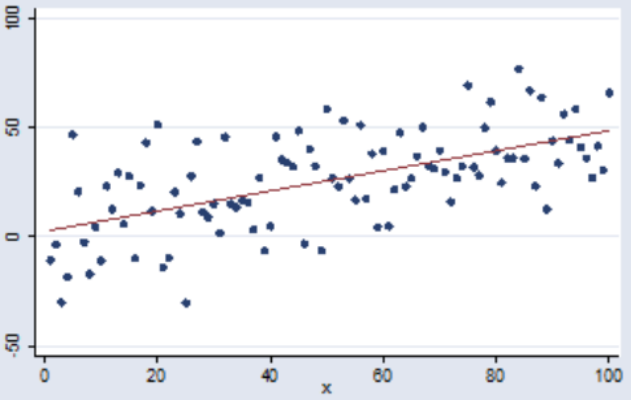
$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = 1 - \frac{SRC}{STC}$$

R^2=0.94



94 % de la variabilidad muestral de Y está explicada por el modelo lineal en X

R^2=0.35



35 % de la variabilidad muestral de Y está explicada por el modelo lineal en X

El modelo lineal clásico

Adoptaremos algunos supuestos llamados "supuestos clásicos"

- ***Linealidad***: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i, \; \forall i = 1, ...n$
- ***X no aleatoria***: las X_i son determinísticas o "fijas en muestreos repetidos".
- ***Esperanza nula** de* μ_i: $E[\mu_i] = 0, \; \forall i = 1, ..., n.$
- ***Homocedasticidad** de* μ_i: $V[\mu_i] = cte. \equiv \sigma^2, \; \forall i = 1, ..., n.$
- ***No correlación serial** de* μ_i: $Cov[\mu_i, \mu_j] = 0, \; \forall i \neq j.$
- ***No multicolinealidad perfecta** de las variables explicativas:* las X_i no pueden ser todas iguales, X debe variar entre las observaciones.

Algunos de estos supuestos pueden no ser realistas. Levantaremos la mayoría a lo largo del curso.

Linealidad

- Nuestro modelo:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i, \; i = 1, ...n$$

- Lo importante es la linealidad en los parámetros α y β. ¿Por qué?

- Vimos algunos modelos no lineales en las variables pero que son lineales en los parámetros:
  - log-log: $lnY_i = \alpha + \beta lnX_i + \mu_i$
  - semi-log: $lnY_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$

X no aleatoria

- ¿Qué significa esto? *Fijas en muestreos repetidos*

- Poco real para una ciencia social

- Uso de experimentos en Economía
  - Se asigna un grupo de beneficiarios a la intervención o "tratamiento" y se mantiene y monitorea otro grupo llamado "control", que no recibe la intervención.
  - Esto **permite estimar el efecto causal de una intervención en algún resultado de interés**.
  - El Premio Nobel de Economía 2019 fue para Banerjee, Duflo y Kremer por sus contribuciones al estudio del desarrollo económico y del combate a la pobreza con estas herramientas. *Ver esta entrada en el Blog del CEDLAS.*

Esperanza nula

$$E[\mu_i] = 0 \ , \ \forall i = 1, ..., n$$

- $\Rightarrow E[Y_i] = \alpha + \beta X_i, \ \ i = 1, ..., n$
- En promedio, la relación entre Y y X es lineal y exacta

Homocedasticidad

$$V[\mu_i] = V[\mu_j], \ \forall\, i \neq j$$

$$V[\mu_i] = cte. \equiv \sigma^2, \ \forall i = 1, ..., n$$

- Intuitivamente: para todas las observaciones, la relación entre Y y X está "igual de cerca" de una relación lineal
- Si la varianza no es constante decimos que hay *heterocedasticidad*
- Notar: si $E[\mu_i] = 0$ y $V[\mu_i] = \sigma^2 \Rightarrow E[\mu_i^2] = \sigma^2$

No correlación serial (o no autocorrelación)

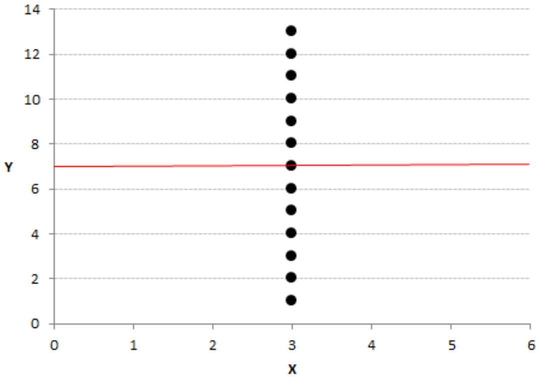
$$Cov[\mu_i, \mu_j] = 0, \ \forall i \neq j.$$

- Es una forma débil de independencia entre los términos aleatorios de distintas observaciones
- Notar que si $E[\mu_i] = 0$ y $Cov[\mu_i, \mu_j] = 0 \Rightarrow E[\mu_i \mu_j] = 0$
- ¿Cuánto vale $Cov[\mu_i, \mu_j]$ para $i = j$?

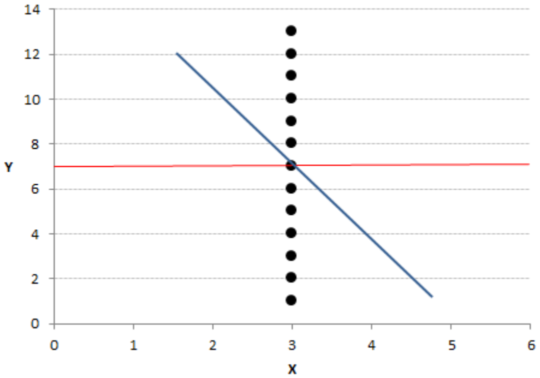
No multicolinealidad perfecta

- En el modelo lineal con 2 variables, este supuesto requiere que la variable X no tenga el mismo valor para todas las observaciones.
- En otras palabras: $X_i, \;\; i = 1, ...n$ no son todas iguales
- ¿Por qué?

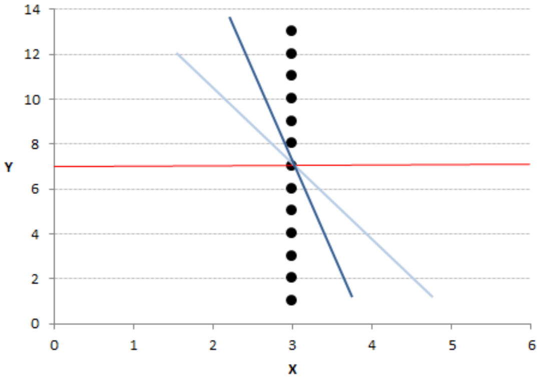
Si todas las X_i son iguales...



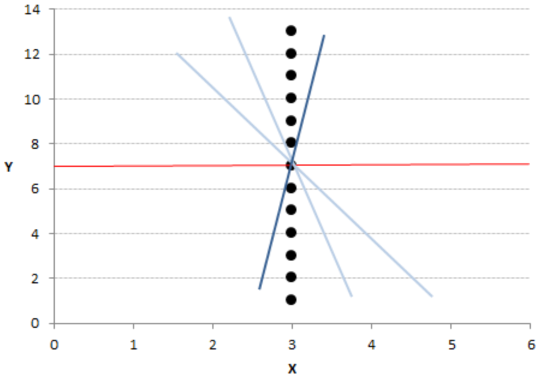
Si todas las X_i son iguales...



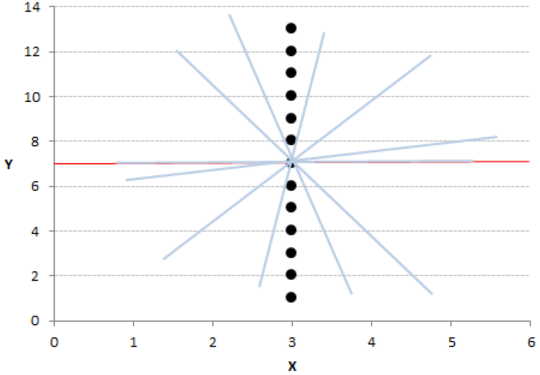
Si todas las X_i son iguales...



Si todas las X_i son iguales...



Si todas las X_i son iguales...



Entonces, ¿por qué las X_i no pueden ser todas iguales?

- Una respuesta más formal: cuando hay multicolinealidad perfecta, las condiciones de primer orden del problema de MCO son linealmente dependientes $\Rightarrow \nexists$ una única solución. Probarlo.

- ¿Intuición? Estimar β implica que le estamos preguntando a los datos cuánto cambia Y cuando cambia X. Cuando hay multicolinealidad perfecta, X no varía en la muestra, de manera que los datos no pueden responder esa pregunta.

Recapitulando... el modelo lineal clásico

$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i, \;\; i = 1, ...n$

1. $E[\mu_i] = 0, \;\; i = 1, ..., n.$
2. $V[\mu_i] = \sigma^2, \;\; i = 1, ..., n.$
3. $Cov[\mu_i, \mu_j] = 0, \;\; i \neq j.$
4. Las X_i no son aleatorias y no son todas iguales

Notar: en el modelo lineal clásico (con 2 variables) los parámetros desconocidos son α, β y σ^2

Rol de los supuestos clásicos

- Ya sabemos que los estimadores mínimo cuadráticos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son "buenos" en el sentido que minimizan la SRC
- En la derivación de los estimadores MCO de la clase pasada nunca recurrimos a los supuestos clásicos
- Entonces, ¿para qué hacemos los supuestos clásicos?
- Vamos a explorar si los estimadores MCO son buenos en algún otro sentido, ahora sí basándonos en los supuestos clásicos
- Nuevas propiedades: insesgadez, varianza mínima, etc.
- Nos concentramos en $\hat{\beta}$. Los resultados para $\hat{\alpha}$ serán cubiertos en los prácticos.

Primero, recordemos una de las propiedades algebraicas

- En la propiedad algebraica Nro. 6 vimos que $\hat{\beta}$ **es una función lineal de las Y_i,** es decir, que puede escribirse

$$\hat{\beta} = \sum \omega_i Y_i$$

  donde ω_i son números reales no aleatorios, que dependen únicamente de las X_i y no son todos iguales a cero.
- En este sentido decimos que $\hat{\beta}$ **es un estimador lineal.**
- Repasemos la demostración (ver cap. 1.4 de notas de clase)

$\hat{\beta}$ es un estimador lineal, es decir, $\hat{\beta} = \sum \omega_i Y_i$

Demostración: Comenzaremos escribiendo a $\hat{\beta}$ como sigue:

$$\hat{\beta} = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) y_i$$

y definamos $w_i = x_i / \sum x_i^2$. Notar que:

$$\sum x_i = \sum (X_i - \bar{X}) = \sum X_i - n\bar{X} = 0$$

lo que implica $\sum w_i = 0$. Del resultado anterior:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \sum w_i y_i \\ &= \sum w_i (Y_i - \bar{Y}) \\ &= \sum w_i Y_i - \bar{Y} \sum w_i \\ &= \sum w_i Y_i \end{aligned}$$

- Intuitivamente poco interesante, analíticamente conveniente

Las propiedades estadísticas

1. Insesgadez: $E[\hat{\beta}] = \beta$, es decir, $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado del parámetro β

- Ver demostración en cap. 1.6 de notas de clase.

- $\hat{\beta}$ *es un estimador insesgado*, esto es: $E(\hat{\beta}) = \beta$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \sum w_i y_i \\
E(\hat{\beta}) &= \sum w_i E(y_i) \qquad \text{(los } w_i \text{ son no estocásticos)} \\
&= \sum w_i x_i \beta \\
&= \beta \sum w_i x_i \\
&= \beta \sum x_i^2 / (\sum x_i^2) \\
&= \beta
\end{aligned}$$

- ¿Qué pasa con la propiedad de insesgadez si levantamos el supuesto de homocedasticidad?
- ¿Cuál es el supuesto más importante para la insesgadez?
- Intuitivamente: ¿qué quiere decir que un estimador sea insesgado?

Insesgadez: intuición

- Supongamos que el verdadero modelo es $Y_i = 2 + 5X_i + \mu_i$
  - $\alpha = 2$ y $\beta = 5$
  - recta de regresión verdadera: $E[Y_i] = 2 + 5X_i$
- Vamos a actuar como si no conociéramos los verdaderos valores de los parámetros:
  - tomamos una muestra de n observaciones
  - estimamos α y β por MCO
- **Primera iteración**. Con la realización de la muestra (datos) obtenemos una estimación: a_1 y b_1
  - Notar que a_1 y b_1 son números, no son aleatorios
  - Seguramente $a_1 \neq 2$ y $b_1 \neq 5$. ¿Por qué?

Insesgadez: intuición

- Repetimos el ejercicio J veces: cada vez obtenemos una nueva muestra de n observaciones de la misma población y volvemos a estimar
  - En la **segunda iteración** obtenemos otra estimación de los parámetros: a_2 y b_2
  - En la **tercera iteración** obtenemos los valores a_3 y b_3
  - ...
  - En la **J-ésima iteración** obtenemos a_J y b_J

Insesgadez: intuición

# iteración	realización de $\hat{\alpha}$	realización de $\hat{\beta}$
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
J	a_J	b_J
$\sum(...)/J$	$\bar{a}$	$\bar{b}$

- Si J es lo suficientemente grande el promedio de los valores estimados coincide con el valor esperado del estimador (LGN).
- Y como los estimadores son insesgados bajo los supuestos clásicos, el valor esperado del estimador coincide con el verdadero valor del parámetro
  - $\bar{a} = E[\hat{\alpha}] = \alpha = 2$
  - $\bar{b} = E[\hat{\beta}] = \beta = 5$

Insesgadez: intuición

- Interpretación: si usamos un estimador insesgado y pudiésemos repetir el experimento muchas veces obtendríamos el verdadero valor del parámetro.
- Si usamos un estimador insesgado **esperamos** obtener el verdadero valor del parámetro

Las propiedades estadísticas

2. $V[\hat{\beta}] = \sigma^2 / \sum x_i^2$

- Ver demostración en cap. 1.6 de las notas de clase
- ¿Qué supuestos usamos para la prueba?

¿Qué mide $V[\hat{\beta}]$?

- Si $\hat{\beta}$ es insesgado, $V[\hat{\beta}]$ mide la dispersión del estimador alrededor del verdadero β
- Cuanto menor sea $V[\hat{\beta}]$, más eficiente es el estimador $\hat{\beta}$
- ¿De qué depende la magnitud de $V[\hat{\beta}]$?

$$V[\hat{\beta}] = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sigma^2}{nV[X]}$$

  - depende de la dispersión del término aleatorio (σ^2)
  - de la cantidad de observaciones (n)
  - de la variabilidad de X (es decir, de $V(X)$)
    - que X tenga poca variabilidad muestral tiene el mismo efecto que tener pocas observaciones

Las propiedades estadísticas

3. Teorema de Gauss-Markov (TGM): si los supuestos clásicos se cumplen, $\hat{\beta}$ tiene la menor varianza entre todos los estimadores lineales e insesgados de β.

- En el modelo lineal clásico, los estimadores MCO son los ***Mejores Estimadores Lineales e Insesgados*** **(MELI)**
- "Mejores" en el sentido de "más eficientes" dentro del grupo de estimadores lineales e insesgados
- Entonces, ¿los estimadores MCO son buenos?
- **Los supuestos clásicos son condiciones necesarias y suficientes del TGM:**
  - **suficientes:** basta que se cumplan para que saber que los estimadores MCO son MELI.
  - **necesarios**: con que solo uno de los supuestos no se cumpla, los estimadores MCO ya no serán los MELI.

Inferencia en el modelo lineal clásico con 2 variables

Consideremos el modelo $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i, \;\; i = 1, ...n$

- Sabemos cómo producir estimaciones puntuales de α y β
- ¿Qué podemos hacer si quisiéramos evaluar la veracidad de una hipótesis como $\beta = 0$? (test de hipótesis)
- Necesitamos asociar alguna medida de confianza a la estimación puntual

Test de hipótesis

- Hipótesis: una conjetura acerca de un parámetro desconocido
- Por ejemplo: $H_0 : \beta = 0$
- Puede ser cierta o falsa
- Si pudiéramos observar β no hay problema
- ¿Y si no conocemos β? No sabemos realmente
- Pero esperamos poder conocer algo acerca de si H_0 es cierta o falsa

Supongamos que estamos interesados en distinguir entre $H_0 : \beta = 0$ y $H_A : \beta \neq 0$, pero sin observar β.

- Podemos usar $\hat{\beta}$
- $\hat{\beta}$ es una variable aleatoria. ¿Por qué?
- Como las realizaciones de $\hat{\beta}$ pueden tomar cualquier valor tanto bajo H_0 como bajo H_A, no podemos resolver nuestro problema observando los valores que toma $\hat{\beta}$ para una muestra particular.

- Supongamos que $\hat{\beta}$ es un "buen" estimador
- Si $H_0 : \beta = 0$ es cierta, entonces, aunque $\hat{\beta}$ pueda tomar cualquier valor, esperamos que tome valores "cercanos" a cero. ¿Por qué?
- Con esta lógica, podemos sospechar que H_0 es falsa si $\hat{\beta}$ toma valores "lejanos" de cero: *rechazamos H_0.*
- Problema: ¿cómo definimos qué valores están "cerca" y qué valores estan "lejos" del cero?

- A fines de definir qué valores de $\hat{\beta}$ están "cerca" y qué valores están "lejos" del cero en el caso de que H_0 fuera cierta, necesitamos conocer la distribución de $\hat{\beta}$ (*distribución de* $\hat{\beta}$ bajo H_0)
- A partir de las propiedades de $\hat{\beta}$ bajo los supuestos clásicos, sabemos que si $H_0 : \beta = 0$ entonces $E[\hat{\beta}] = 0$. ¿Por qué? También sabemos su varianza.
- Pero no tenemos información suficiente para conocer toda la distribución de $\hat{\beta}$ bajo H_0
- ¿Dónde conseguimos esa información?

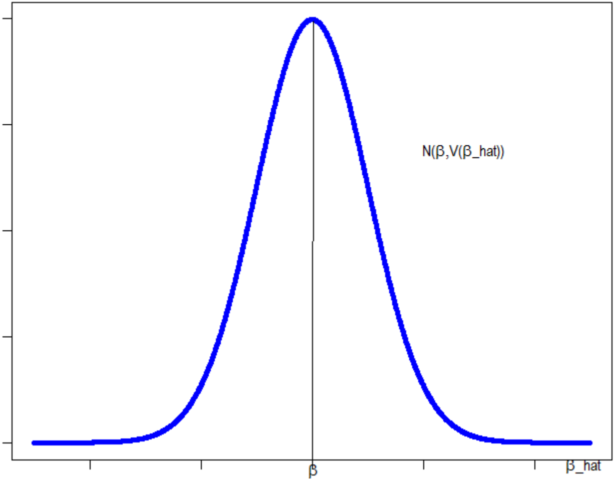
Nuevo supuesto: normalidad del término aleatorio

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2)$$

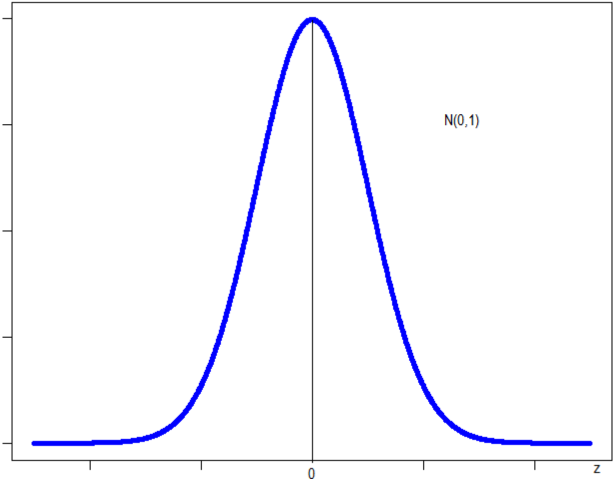
- Con este nuevo supuesto, tanto Y_i, $i = 1, ..., n$, como $\hat{\beta}$ (y también $\hat{\alpha}$) son variables aleatorias con **distribución normal**. ¿Por qué?
  - Recordar que cualquier función lineal de una variable normal es también normal
  - Y que el modelo de Y_i viene dado por: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$
  - Y que $\hat{\beta}$ se puede escribir como $\hat{\beta} = \sum \omega_i Y_i$

- Entonces, con los supuestos clásicos más el supuesto de normalidad tenemos:
$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 / \sum x_i^2)$$
- De manera que cuando es cierta $H_0 : \beta = 0$, se cumple:
$$\hat{\beta} \sim N(0, \sigma^2 / \sum x_i^2)$$
- También se cumple:
$$z \equiv \frac{\hat{\beta} - 0}{\sqrt{\sigma^2 / \sum x_i^2}} \sim N(0, 1)$$
- Cuando $\hat{\beta}$ es “chico”, z es “chico”

Distribución de $\hat{\beta}$



Distribución de z (estandarización de $\hat{\beta}$)



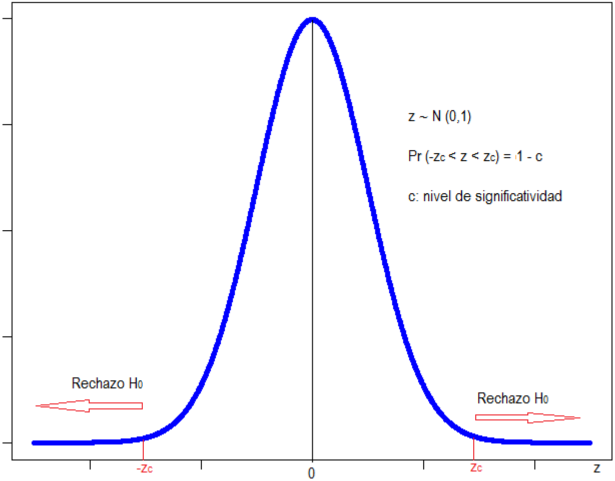
- **Regla de decisión para el test de hipótesis:** ***aceptamos*** **H_0 si la realización de $\hat{\beta}$ está cerca del valor que postula esa hipótesis nula.**

- Para definir "cercano" elegimos una constante $c \in (0, 1)$ tal que:

$$\Pr\left[-z_c \leq z \leq z_c\right] = 1 - c$$

  - Notar: la elección de c determina los valores $-z_c$ y z_c.

- Si el valor de z (estandarización de $\hat{\beta}$) está entre los límites $-z_c$ y z_c, concluimos que $\hat{\beta}$ está "cerca" de lo que postula H_0 y aceptamos esa hipótesis.


z ~ N (0,1)
Pr (-zc < z < zc) = 1 - c
c: nivel de significatividad
Rechazo H0
Rechazo H0
-Zc
0
Zc
z

- La región de aceptación de H_0 en términos de z está dada por:

$$\Pr\left[-z_c \leq z \leq z_c\right] = 1 - c$$

- Reemplazando z por su definición:

$$\Pr\left[-z_c\left(\sqrt{\sigma^2/\sum x_i^2}\right) \leq \hat{\beta} \leq z_c\left(\sqrt{\sigma^2/\sum x_i^2}\right)\right] = 1 - c$$

- Entonces la región de aceptación de H_0 viene dada por los valores de $\hat{\beta}$ en el intervalo:

$$0 \pm z_c\left(\sqrt{\sigma^2/\sum x_i^2}\right)$$

- Aceptamos H_0 si $\hat{\beta}$ "cae" en ese intervalo. En caso contrario, rechazamos H_0
- Notar: elegimos c de antemano.
- c es la probabilidad de rechazar una H_0 cuando es cierta (error tipo I) y se conoce como el nivel de **significatividad del test**.
- Al elegir de antemano el nivel de significatividad del test, estamos resignándonos a cometer el error tipo I un $c \times 100\%$ de las veces. ¿Por qué aceptamos cometer errores tipo I?
- Dado c, z_c puede obtenerse de una tabla de percentiles de la distribución normal estándar
- Luego las zonas de aceptación y rechazo se computan usando $0 \pm z_c \left(\sqrt{\sigma^2 / \sum x_i^2} \right)$

Problema: σ^2 no se observa!

- Estimador insesgado de σ^2:

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

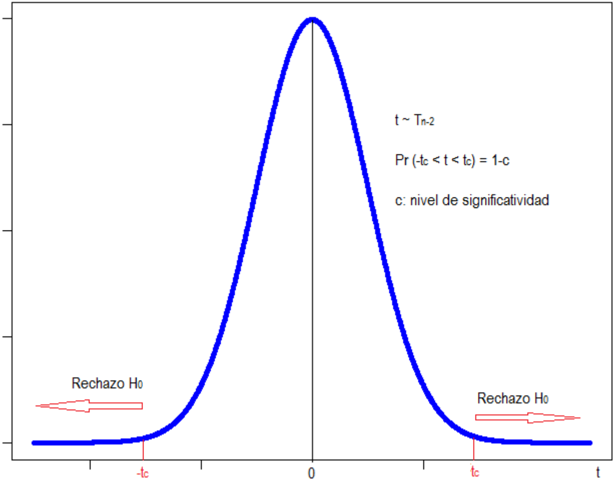
- Resultado: bajo todos los supuestos, si $H_0 : \beta = 0$ es cierta, entonces

$$t \equiv \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S^2 / \sum x_i^2}} \sim T_{n-2}$$

donde T_{n-2} es la distribición T de Student con $n-2$ grados de libertad

$$t \equiv \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S^2 / \sum x_i^2}} \sim T_{n-2}$$

- t es z pero reemplazando σ^2 por S^2
- Ahora todo puede ser computado con los datos disponibles


t ~ Tn-2
Pr (-tc < t < tc) = 1-c
c: nivel de significatividad
Rechazo H0
Rechazo H0
-tc
0
tc
t

- Hasta ahora vimos el caso particular: $H_0 : \beta = 0$ vs. $H_A : \beta \neq 0$
- Caso general: $H_0 : \beta = \beta_0$ vs. $H_A : \beta \neq \beta_0$
- Ejemplo: supongamos que en el modelo $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$, donde Y es el consumo agregado y X es el ingreso disponible, queremos evaluar si la propensión marginal a consumir es igual a 1. Para eso postulamos $H_0 : \beta = 1$

- Entonces, bajo todos los supuestos y cuando es cierta $H_0 : \beta = \beta_0$, se cumple:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta_0, \sigma^2 / \sum x_i^2)$$

- Que estandarizando resulta:

$$z \equiv \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 / \sum x_i^2}} \sim N(0, 1)$$

- Y si reemplazamos por el estimador de σ^2 tenemos:

$$t \equiv \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{S^2 / \sum x_i^2}} \sim T_{n-2}$$

$$t \equiv \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{S^2 / \sum x_i^2}} \sim T_{n-2}$$

- En la práctica, reemplazamos β_0 por cualquier valor que nos interese
- En general, el estadístico t es la versión estimada de H_0, dividida por la raíz cuadrada de la varianza estimada.

Bibliografía para esta clase

- Notas de Clase, Capítulo 1.
- Wooldridge, Capítulo 2.